lemme :

Soit f une isométrie de l'espace et M un point tels que $M' = f(M) \neq M$.

Les points fixes de f appartiennent au plan médiateur du segment $[M, M']$.

dém. :

Soit A un point fixe de f. On a $f(A) = A$ et $f(M) = M'$ donc $AM' = AM$ car f est une isométrie et par suite A appartient au plan médiateur du segment $[M, M']$.

lemme :

Une isométrie de l'espace fixant quatre points non coplanaires est l'identité.

dém. :

Soit f une isométrie de l'espace fixant les points non coplanaires A, B, C, D.

Par l'absurde, si f n'est pas l'identité alors il existe un point M tel que $M' = f(M) \neq M$.

En vertu du lemme ci-dessus, les points A, B, C, D appartiennent au plan médiateur du segment $[M, M']$ et ces quatre points sont donc coplanaires. Absurde.

Théorème :

Toute isométrie de l'espace peut s'écrire comme un produit d'au plus quatre réflexions.

dém. :

Soit f une isométrie de l'espace $\mathcal{E}$.

Si $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ alors f s'écrit comme produit de 0 réflexion.

Sinon, il existe un point A tel que $A' = f(A) \neq A$.

Notons s la réflexion par rapport au plan $\mathcal{P}$ médiateur de $[A, A']$.

$s \circ f$ est une isométrie et $s \circ f(A) = s(A') = A$.

Si $s \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ alors $f = s$ est le produit de 1 réflexion.

Sinon, il existe un point B tel que $B' = s \circ f(B) \neq B$.

Notons s' la réflexion par rapport au $\mathcal{P}'$ médiateur de $[B, B']$.

$s' \circ s \circ f(A) = s'(A) = A$ car $A \in \mathcal{P}$ et $s' \circ s \circ f(B) = s'(B') = B$.

Ainsi $s' \circ s \circ f$ est une isométrie qui fixe A et B.

De plus $A \in \mathcal{P}'$ et $B \notin \mathcal{P}'$ donc $A \neq B$.

Si $s' \circ s \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ alors $f = s \circ s'$ est le produit de 2 réflexions.

Sinon, il existe un point C tel que $C' = s' \circ s \circ s(C) \neq C$.

Notons s'' la réflexion par rapport au plan $\mathcal{P}''$ médiateur de $[C, C']$.

Comme ci-dessus $s'' \circ s' \circ s \circ f$ est une isométrie qui fixe A, B, C

De plus $A, B \in \mathcal{P}''$ et $C \notin \mathcal{P}''$ donc $C \notin (AB)$.

Si $s'' \circ s' \circ s \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ alors $f = s \circ s' \circ s''$ est le produit de 3 réflexions.

Sinon, il existe un point D tel que $D' = s'' \circ s' \circ s \circ f(D) \neq D$.

Notons s''' la réflexion par rapport au plan $\mathcal{P}'''$ médiateur de $[D, D']$.

Comme précédemment $s''' \circ s'' \circ s' \circ s \circ f$ est une isométrie qui fixe A, B, C, D.

Or $A, B, C \in \mathcal{P}'''$ et A, B, C ne sont pas alignés, donc $\mathcal{P}''' = (ABC)$ mais $D \notin \mathcal{P}''$ donc A, B, C, D ne sont pas coplanaires et par suite $s''' \circ s'' \circ s' \circ s \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.

Par suite $f = s \circ s' \circ s'' \circ s'''$ est le produit de 4 réflexions.